

Zauberlinien im Dreieck

Es geht hier um
**Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende,
Seitenhalbierende,
Höhen, Mittelparallele,**

also auch um den **Umkreis** und den **Inkreis** eines Dreiecks.

Ferner wird der **Thaleskreis** besprochen.

Eine Aufgabensammlung mit Lösungen gibt es unter der Nummer 11122.

Datei Nr. 11121

Stand 22. Februar 2012

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Mittelsenkrechte im Dreieck	4
	Umkreis eines Dreiecks	6
2	Winkelhalbierende im Dreieck	9
	Inkreis eines Dreiecks	10
3	Seitenhalbierende im Dreieck	24
	Schwerpunkt eines Dreiecks	24
	Ein Wort zu Streifenscharen	25
	Streifenscharen im Dreieck	26
	Satz über den Schwerpunkt	26
	Konstruktionsbeispiele	27
4	Höhen im Dreieck	31
5	Mittelparallelen im Dreieck	35
6	Der Thaleskreis	36
7	Vermischte Konstruktionen mit allerlei Zauberlinien	41
8	Zusammenfassung über die Zauberlinien des Dreiecks	49

Hinweise:

Wenn man einen Text über die besonderen Linien eines Dreiecks schreiben will, dann muss man sich auf das Niveau der Klasse 7 begeben. Dann aber wird es schwierig, denn Schüler dieser Altersstufe tun sich noch schwer damit, mathematische Texte zu verstehen. Daher beschränke ich mich einerseits auf Nennung von Fakten und Vorführen einiger Konstruktionen, so dass der Leser sich informieren kann. Andererseits aber bietet diese Materie so viel Interessantes, dass ich für fortgeschrittene Leser oder auch Schüler, die pfiffig sind und einfach mehr wissen wollen oder neugierig werden, weiterführende Aufgaben zeige, die ich im Text als „schwer“ kennzeichne. Die kann man dann weglassen, wenn es nur darum geht, Übungen für den Normalunterricht in Klassenstufe 7 zu finden.

Auf weiterführende Themen wie Eulersche Gerade, Ankreis usw. gehe ich hier nicht ein!

WICHTIG:

1. Ich habe mit meinen Schülern im Unterricht eine Spielregel vereinbart, und die heißt, konstruiere nur mit dem, was gegeben ist, berechne nichts zusätzlich. Wenn also 2 Winkel gegeben sind, wollen wir uns nicht dadurch die Arbeit erleichtern, dass wir den 3. Winkel über die Winkelsumme (180°) berechnen. Warum? Weil die Aufgabe will, dass wir uns Gedanken machen, wie dies ohne diese Rechnung geht. Und wir wollen unseren Geist trainieren.
2. In meinen Konstruktionstexten schreibe ich eigentlich nie „Zeichne einen Kreis um A mit Radius b usw.“ Dass wir in der Geometrie zeichnen, weiß doch jeder. Ich schreibe gleich das Ergebnis dieser Zeichnung auf: Der Kreis um A mit Radius b schneidet (z. B. den freien Schenkel von α in C).
3. Wir konstruieren hier "DreiECKE". Diese sind dann festgelegt, wenn man die drei Eckpunkte kennt. Daher lasse ich meistens den Satz weg „Verbinde A mit C“, wenn wir nunmehr A und C haben, aber diese Linie noch fehlt. Es ist klar, dass wir zur besseren Veranschaulichung die Eckpunkte verbinden, also außer den Punkten nur 3 Seiten erhalten (dann haben wir ein „DreiSEIT“). Dies ist also kein Fehler sondern spart Zeit, denn warum soll man Selbstverständliches extra erwähnen!
4. Ich verwende immer wieder den Begriff kongruent, weil ich voraussetze, dass man vor diesem Stoff schon die einfachen Dreieckskonstruktionen behandelt hat, und dazu bespricht man eigentlich zugleich die Kongruenz, also die Frage, ob die Ergebnisse der Konstruktion eindeutig = deckungsgleich = kongruent sind.

Friedrich Buckel im Januar 2007

Ergänzung

Es gibt jetzt einen eigenen Text über Winkelhalbierende (Nummer 11430). Dort habe ich alles aus diesem Text zusammengestellt und – (das war der Grund für diese Aktion) einen Satz bewiesen, der verblüffend ist, und zu dem man einen Strahlensatz benötigt, der in der Regel erst in der Klassenstufe 8 oder 9 bewiesen wird.

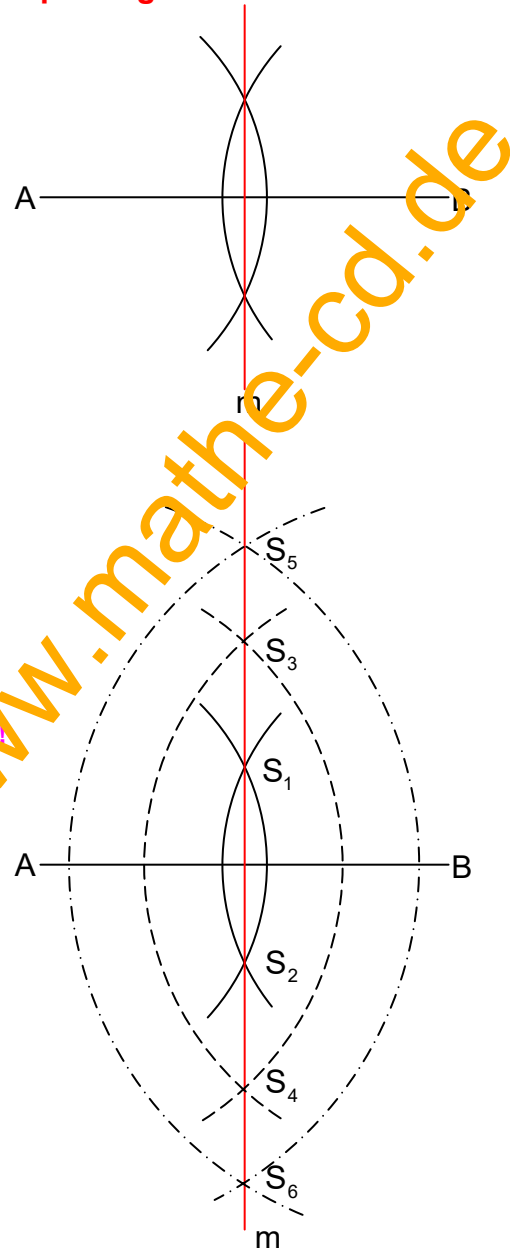
Juli 2011

§ 1 Mittelsenkrechte im Dreieck

Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade, die senkrecht auf einer Strecke steht und durch deren Mittelpunkt geht.

Rechts erkennen wir die übliche Konstruktion:

Man zeichnet um A und B je einen Kreisbogen mit demselben Radius, aber so dass sie sich zweimal schneiden. Verbindet man die Schnittpunkte der Kreisbögen, erhält man die **Mittelsenkrechte** der Strecke AB.



Schüler fragen oft, welchen Radius man nehmen soll. Die beste Antwort darauf ist: Zeichne mehrere Paare solcher Kreisbögen (mit jeweils gleichem Radius) und beobachte, was passiert:

Die untere Abbildung zeigt eine solche Konstruktion mit drei Kreispaares.

Das innerste Paar hat den Radius 3 cm, das mittlere 4 cm und das äußere 5 cm.

Man beobachtet:

Alle Schnittpunkte liegen auf der Mittelsenkrechten!

Also ist es egal, welchen Radius man verwendet!

Ganz wichtige Überlegung:

Die beiden Punkte S_1 und S_2 sind die Schnittpunkte der Kreise mit Radius 3 cm. Sie haben daher beide von A und B die Entfernung 3 cm.

Die beiden Punkte S_3 und S_4 sind die Schnittpunkte der Kreise mit Radius 4 cm. Sie haben daher beide von A und B die Entfernung 4 cm.

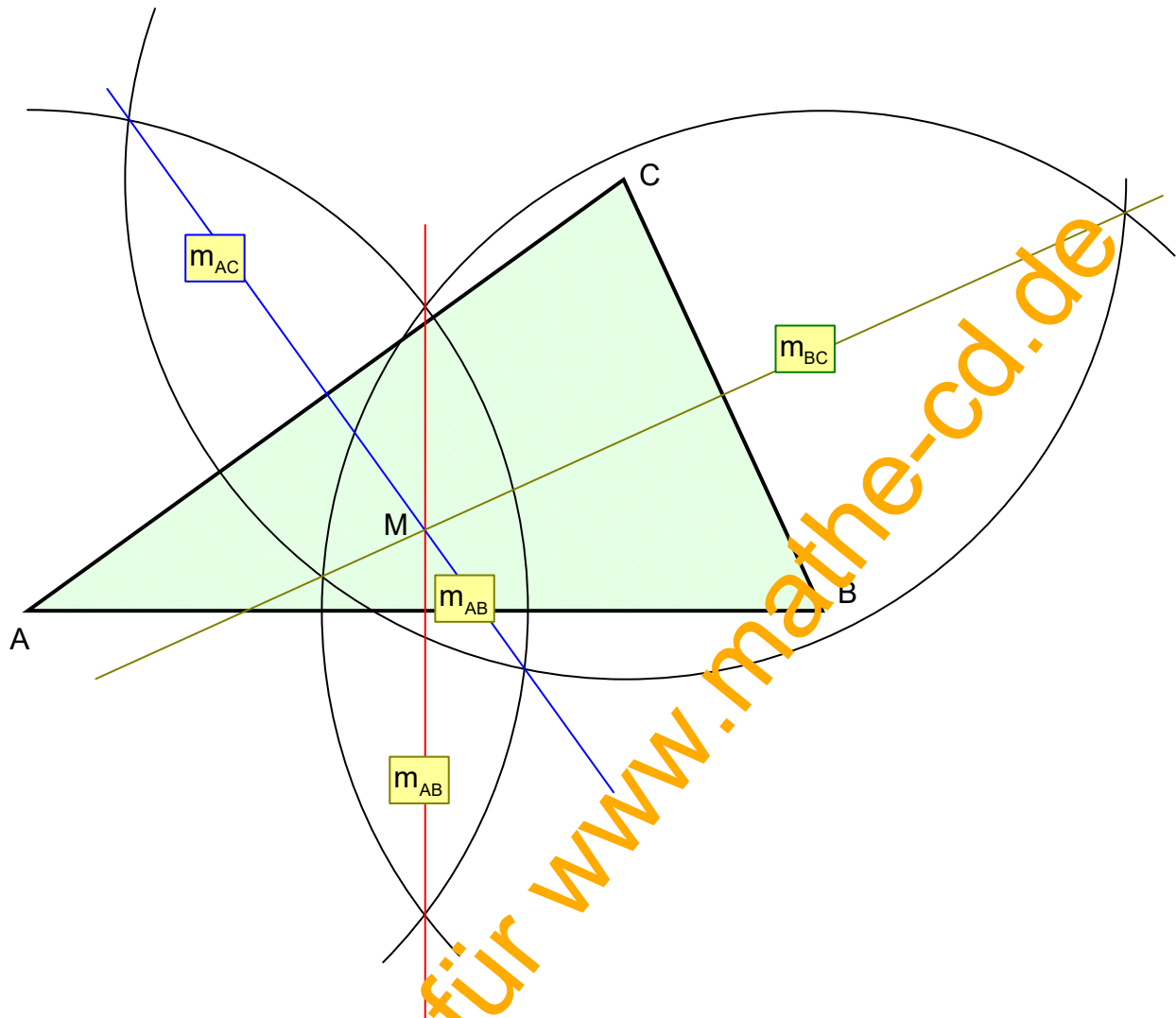
Die beiden Punkte S_5 und S_6 sind die Schnittpunkte der Kreise mit Radius 5 cm. Sie haben daher beide von A und B die Entfernung 5 cm.

Wir beobachten:

Jeder Punkt S der Mittelsenkrechten hat von den Endpunkten der Strecke AB den selben Abstand: $\overline{SA} = \overline{SB}$

Diese wichtige Eigenschaft jeder Mittelsenkrechten ist wichtig und wird oft benötigt!

Konstruktion der drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks



Ein Dreieck hat drei Seiten und daher gibt es auch drei Mittelsenkrechte. Wenn man jede davon mit zwei Kreisbögen konstruiert, dann benötigt man 6 Kreisbögen und erhält eine so unübersichtliche Zeichnung, dass man davon abrufen muss.

Man kann nämlich mit drei Kreisbögen auskommen, die alle denselben Radius haben müssen. Sie müssen nur eben hinreichend groß sein, so dass wir alle benötigten Schnittpunkte bekommen.

Die Abbildung zeigt diese Situation.

Besonderheit:

Alle drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks gehen durch einen Punkt!

Dies ist hier kein Zufall, und die folgende Überlegung zeigt, dass dies immer so sein muss!

Nehmen wir an, wir hätten nur die Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{AC} gezeichnet. Dann schneiden sie sich in einem Punkt M.

Weil M auf m_{AB} liegt, hat er von A und B dieselbe Entfernung.

Weil M aber auch auf m_{AC} liegt, hat er von A und C dieselbe Entfernung.

Also hat er auch von B und C dieselbe Entfernung. Daher muss er auch auf der Mittelsenkrechten m_{BC} liegen. Folglich geht diese 3. Mittelsenkrechte auch durch den Schnittpunkt der beiden anderen Geraden.

Wichtige Folgerung:

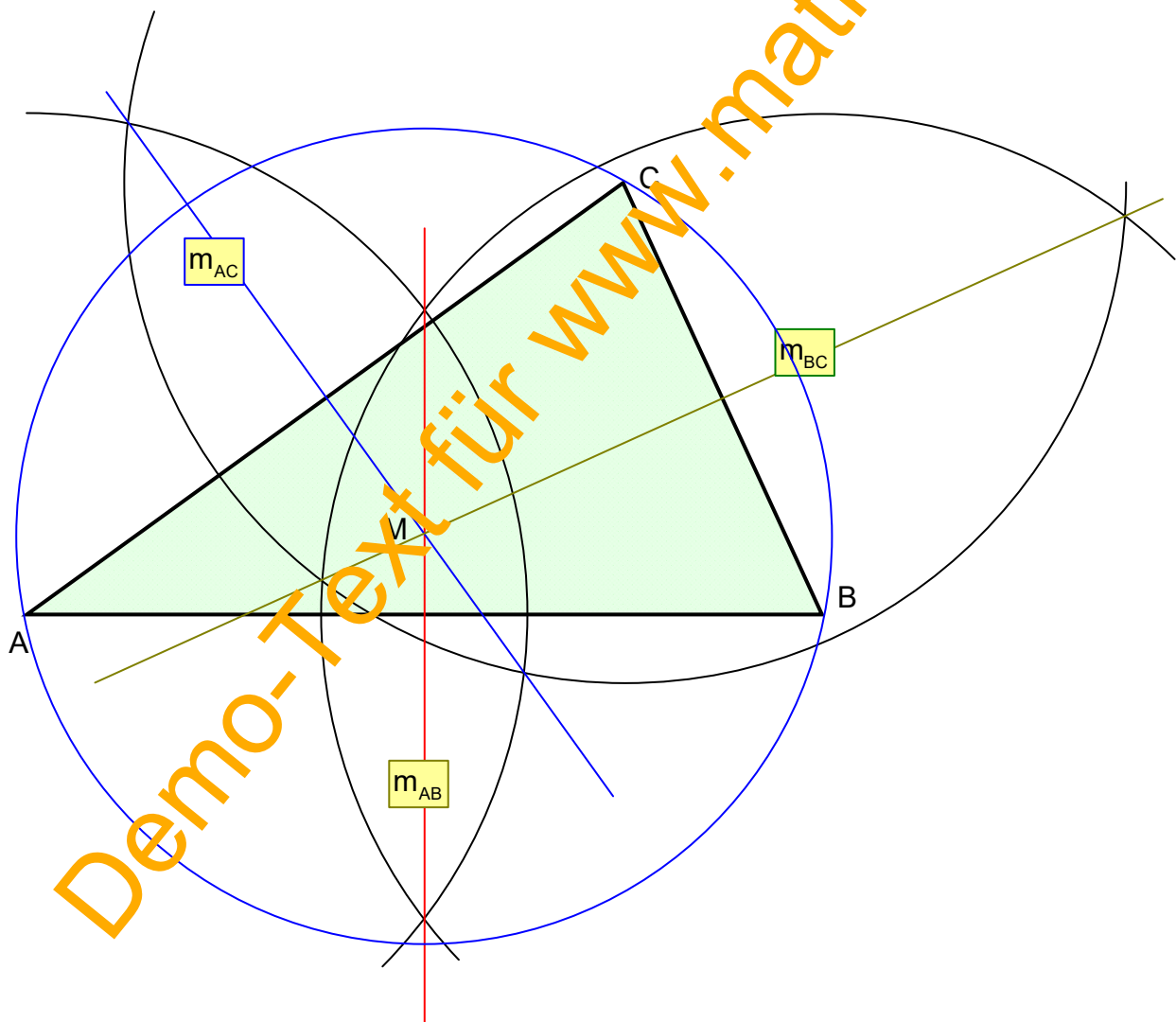
Der Schnittpunkt M der drei Mittelsenkrechten hat von A , B und C den gleichen Abstand. Dies kann man mit dem Zirkel nachmessen, indem man in M einsticht und dann einen Kreis um M durch A zeichnet. Dieser muss dann auch durch B und C gehen!

Ergebnis:

Jedes Dreieck hat einen Umkreis.
Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Zur Konstruktion dieses Umkreismittelpunktes M genügt das Zeichnen zweier Mittelsenkrechten.

Die folgende Abbildung zeigt den Umkreis zur Konstruktion der Seite zuvor.



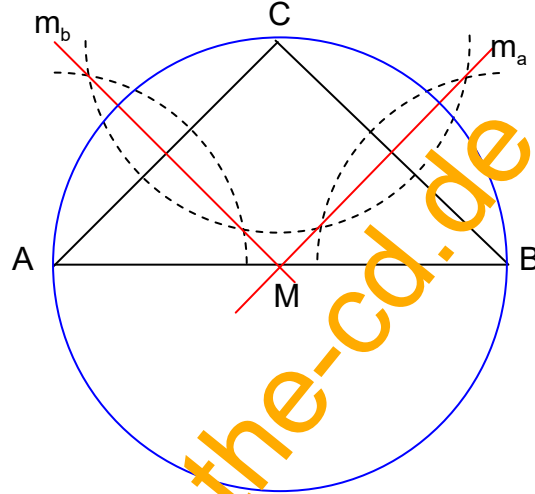
Konstruktionsbeispiele

- (1) **Zeichne ein Dreieck aus $c = 6,0$ cm, $\alpha = 45^\circ$ und $b = 4,2$ cm.
Konstruiere den Umkreismittelpunkt und zeichne den Umkreis ein.**

Lösung

Konstruktionstext:

1. Zeichne $AB = c$.
2. Lege an AB in A den Winkel α an.
3. Trage auf dem freien Schenkel von A aus b ab bis C .
4. Konstruiere mit zwei Kreisbögen um A und C die Mittelsenkrechte von b .
5. Konstruiere mit zwei Kreisbögen um B und C die Mittelsenkrechte von a .
6. Die beiden Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt M .



Beachte: Zur Konstruktion von M genügen zwei der drei Mittelsenkrechten!

- (2) **Zeichne ein Dreieck aus $a = 5,3$ cm, $r = 4,5$ cm (Umkreisradius) und $c = 7,0$ cm.**

Lösung

Konstruktionstext:

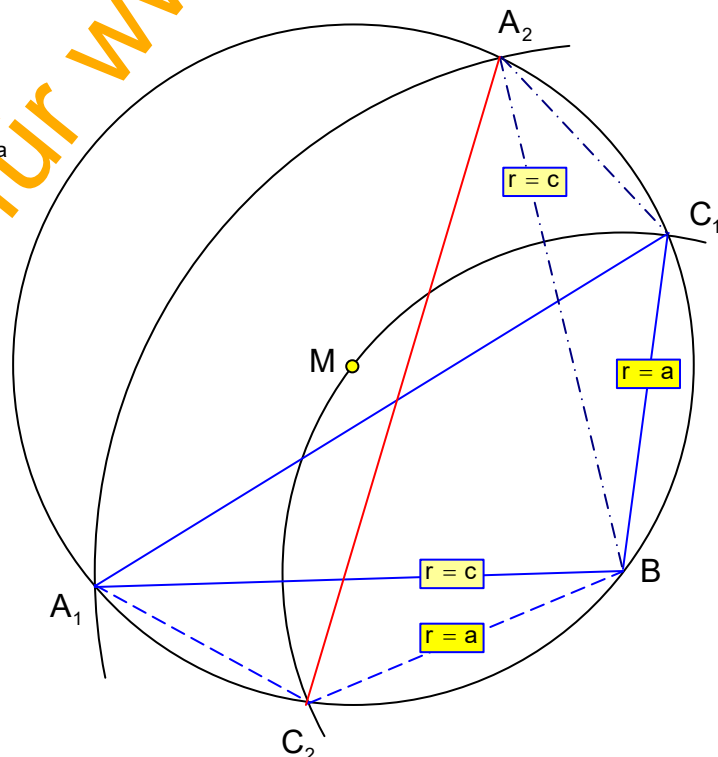
1. Zeichne einen Kreis K mit Radius r .
(M darf beliebig gewählt werden, weil wir ja die Zeichnung damit erst beginnen!)
2. Wähle auf K einen Punkt B .
3. Der Kreis um B mit Radius c schneidet K in A_1 und A_2 .
4. Der Kreis um B mit Radius a schneidet K in C_1 und C_2 .

Es gibt 4 Lösungen:

Die Dreiecke A_1BC_1 und A_2BC_1 haben positiven Umlaufsinn (gegen die Uhr!)

Die Dreiecke A_1BC_2 und A_2BC_2 haben negativen Umlaufsinn.

Die beiden letzten Dreiecke sind kongruent zu den ersten beiden und stellen daher keine wesentlich neue Lösung dar.



Achtung:

An diesem Beispiel kann man noch etwas Wichtiges beobachten:

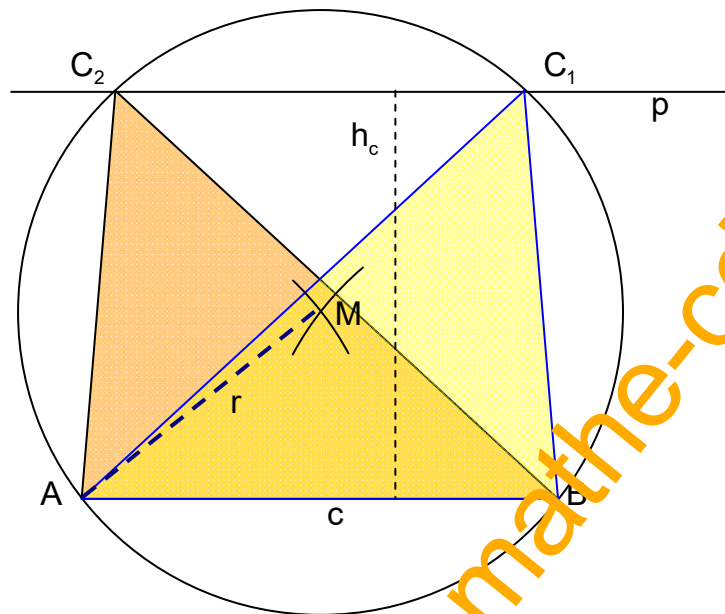
Das Dreieck ist stumpfwinklig, denn es ist $\beta > 90^\circ$.

Als Folge davon liegt der Umkreismittelpunkt M außerhalb des Dreiecks!

(3) Zeichne ein Dreieck aus $c = 6,3 \text{ cm}$, $h_c = 5,4 \text{ cm}$ und dem Umkreisradius $r = 4,0 \text{ cm}$.

Lösung

Konstruktion:



Konstruktionstext:

1. Zeichne $AB = c$.
2. Zeichne zu AB eine Parallele p im Abstand h_c .
3. Zwei Kreise mit gleichem Radius um A und B schneiden sich in M (der zweite Schnittpunkt M' wird nicht gebraucht).
4. Zeichne den Umkreis (um M durch A und B). Er schneidet p in C_1 und C_2 .

Es gibt zwei kongruente Lösungen ABC_1 und ABC_2 .

§ 2 Winkelhalbierende im Dreieck

Die Winkelhalbierende im Dreieck ist eine Gerade, die einen Dreieckswinkel halbiert.

Rechts erkennen wir die übliche Konstruktion:

Man zeichnet um den Scheitel A einen Kreisbogen der die beiden Schenkel in S_1 und S_2 schneidet. Um S_1 und S_2 zeichnet man nun zwei Kreisbögen mit demselben Radius (!). Sie schneiden sich in S_3 . Die Gerade (AS_3) ist die Winkelhalbierende.

Schüler fragen oft, welchen Radius man nehmen soll. Die beste Antwort darauf ist: Wichtig ist nur, dass der zweite Kreis um S_2 denselben Radius wie der erste (um S_1) hat. Der Radius des ersten Kreises ist egal.

Übrigens braucht man gar nicht die ganze Gerade, die ja nach links unten über A hinaus weiterläuft. Es genügt, wenn die Linie bei A beginnt und man sie nur nach rechts oben gehen lässt. Das nennt man dann eine Halberade.

MERKE:

Eine **Gerade** hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt, obwohl man natürlich irgendwo mit dem Zeichnen absetzt, so dass man meinen könnte, dass doch Anfangs- und Endpunkt vorhanden sind.

Eine **Strecke** hat einen Anfangs- und einen Endpunkt.

Eine **Halbgerade** hat dagegen einen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.

Dasselbe gilt für einen **Strahl**. Aber dieser hat zusätzlich eine Richtung!

Winkelhalbierende gibt es auch in Dreiecken, und zwar gleich drei davon, weil ein Dreieck ja drei Winkel besitzt.

Lässt man die Winkelhalbierende an der gegenüberliegenden Seite enden, dann ist sie eine Strecke!

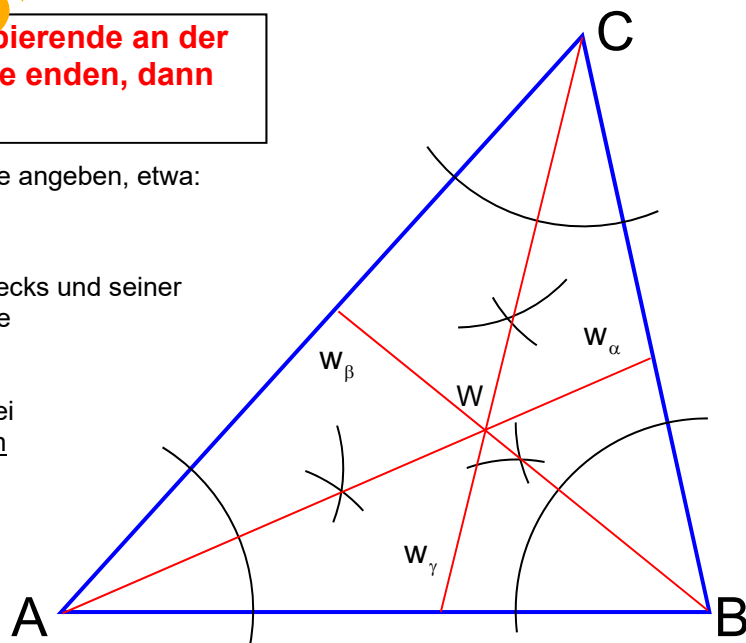
Dann kann man auch eine Länge angeben, etwa:

Es sei $w_\alpha = 4,3 \text{ cm}$.

Bei der Berechnung dieses Dreiecks und seiner drei Winkelhalbierenden fällt eine Besonderheit auf.

In *diesem* Dreieck gehen alle drei Winkelhalbierenden durch einen Punkt W.

Wir werden noch klären, ob dies Zufall ist oder immer so sein wird.



Erklärung der Begriffe Lot und Lotfußpunkt.

Im Alltag versteht man unter einem Lot eine Schnur, an dem ein Körper hängt. Damit kann man hervorragend senkrechte Linien überprüfen. Früher war das Lot beim Bauen ein wichtiges Hilfsmittel.

In der Mathematik versteht man unter einem Lot oder einer Lotgeraden eine Linie, die auf einer anderen Linie senkrecht steht.

Dazu gibt es diese Grundaufgabe:

Fälle von einem Punkt P das Lot (die Senkrechte) auf eine Gerade g .

Hier die Konstruktion mit einem Geodreieck:

Man legt das Geodreieck so über die Gerade g , dass diese unter der Mittellinie des Geodreiecks liegt. Dann achtet man darauf, dass P direkt vor der Zeichenkante des Geodreiecks liegt.

Jetzt kann man das Lot durch P senkrecht zu g einzeichnen.

Der Schnittpunkt des Lotes L mit g heißt **Lotfußpunkt F** .

Die zweite Konstruktion erstellt man mit dem Zirkel:

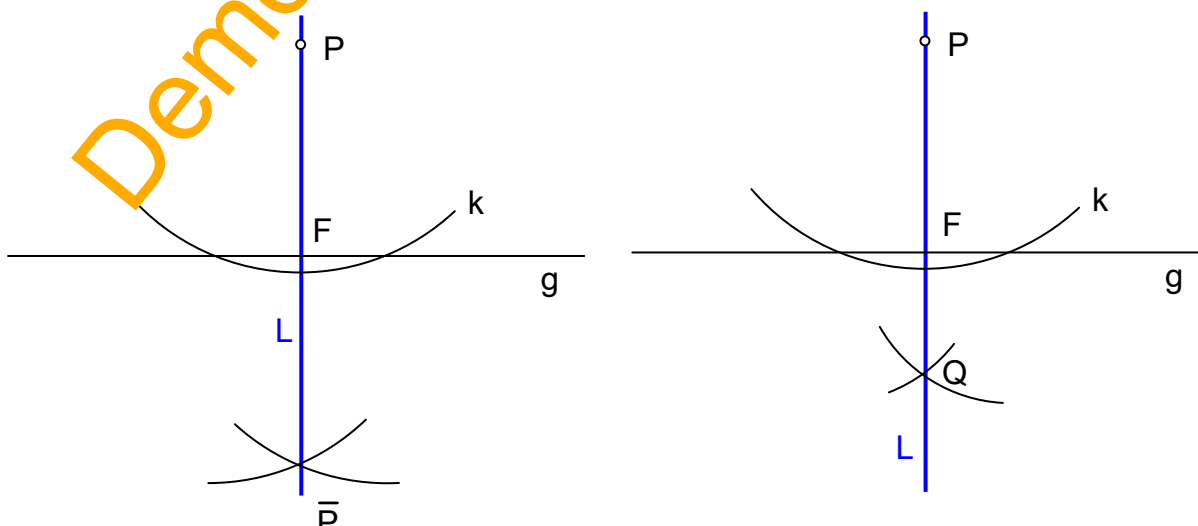
Dazu zeichnet man um P einen Kreis(bogen), der g zweimal schneidet.

Diese beiden Schnittpunkte verwendet man als Mittelpunkte für die nächsten beiden Kreise, die den gleichen Radius haben müssen. Dieser Radius muss aber nicht gleich groß sein wie der des ersten Kreises (siehe rechte Abbildung). Dann erhält man den Schnittpunkt Q . Die Gerade (PQ) steht auf g senkrecht und ist daher das Lot L von P auf g .

Der Schnittpunkt F von L und g ist der Lotfußpunkt.

Zeichnet man alle drei Kreisbögen mit gleichem Radius, was man eigentlich meistens so macht, dann ist außerdem der Schnittpunkt der unteren beiden Kreisbögen das Spiegelbild des Punktes P an g .

Dies ist in der linken Abbildung der Fall, weshalb dort der Schnittpunkt statt mit Q mit $\bar{P}$ bezeichnet worden ist. Das ist bei Bildpunkten nach Spiegelungen üblich (oder man nimmt P').



Anwendung der Lotkonstruktion auf die Winkelhalbierenden:

Man zeige, dass Folgendes richtig ist:

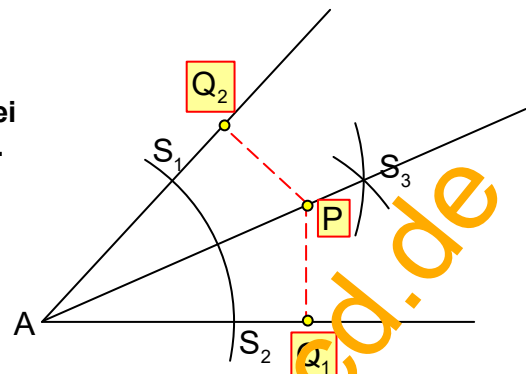
Wenn man von einem beliebigen Punkt P auf der Winkelhalbierenden das Lot auf die beiden Schenkel des Winkels fällt, dann erhält man zwei Punkte Q_1 und Q_2 (das sind die Lotfußpunkte). Die Strecken PQ_1 und PQ_2 sind gleich lang!

Daher hat der Punkt P von den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand.

Dies gilt für jeden Punkt P der Winkelhalbierenden. Jeder Punkt P dieser Winkelhalbierenden hat von den beiden Schenkeln den gleichen Abstand.

Daher gilt dieser wichtige Satz:

Alle Punkte der Winkelhalbierenden haben die Eigenschaft, dass sie von den beiden Schenkeln des Winkels denselben Abstand haben!



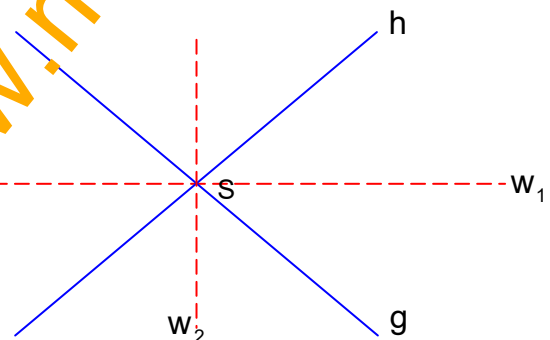
In der rechten Abbildung sind zwei Geraden g und h dargestellt, die sich in S schneiden. Dadurch sind vier Winkel entstanden. Die jeweils gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß und werden **Scheitelwinkel** genannt. Zwei nebeneinander liegende Winkel ergeben zusammen 180° und heißen **Nebenwinkel**.

Ferner sind die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 dieser vier Winkel eingezeichnet.

Für jede dieser Winkelhalbierenden gilt die Geschichte mit dem gleichen Abstand von den beiden Schenkeln.

Daher kann man Folgendes behaupten:

Die Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand haben, liegen alle auf den Winkelhalbierenden.



Hinweis:

Noch etwas kann wichtig sein:

Spiegelt man in der oberen Abbildung Q_1 an der Winkelhalbierenden, erhält man Q_2 . Die Winkelhalbierende ist damit auch die Mittelsenkrechte über der Strecke Q_1Q_2 .

Dies hilft beispielsweise dann weiter, wenn man diese 2 Punkte Q_1 und Q_2 kennt. Man kann dann daraus die Winkelhalbierende konstruieren (Dies wird in der Aufgabe 4 auf Seite **Fehler! Textmarke nicht definiert.** mit Lösung auf Seite **Fehler! Textmarke nicht definiert.** wichtig).

Besonderheit:**Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt**

Dies kann man schon in Klasse 7 beweisen:

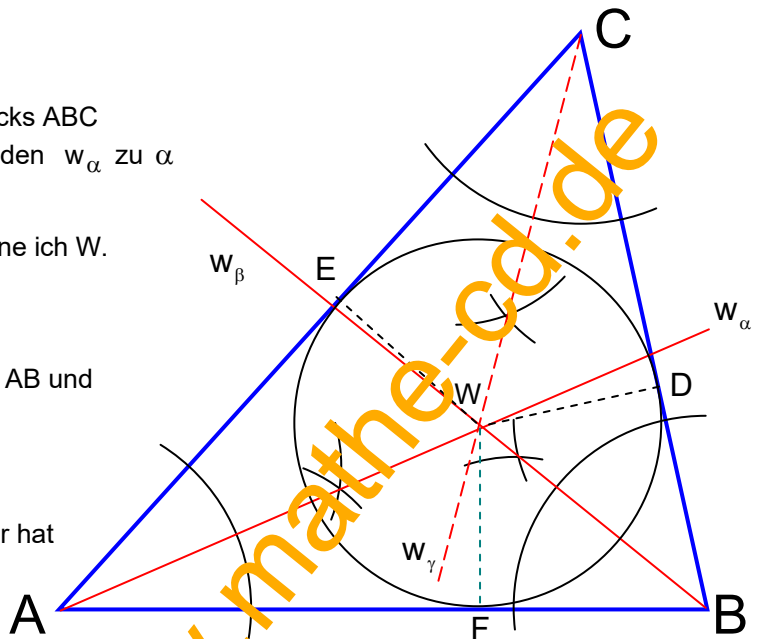
Beweis:

Wir beginnen mit der Zeichnung des Dreiecks ABC und konstruieren dazu die Winkelhalbierenden w_α zu α und w_β zu β .

Den Schnittpunkt dieser beiden Linien nenne ich W.

Jetzt kommen zwei Überlegungen:

1. W liegt auf w_α und hat daher von AB und von AC denselben Abstand :
 $\overline{WF} = \overline{WE}$
2. W liegt aber auch auf w_β und daher hat W von AB und von BC den gleichen Abstand: $\overline{WF} = \overline{WD}$
3. Wenn W von AB und AC den gleichen Abstand hat, und ebenso von AB und BC, dann hat er auch von AC und BC den gleichen Abstand.
Es gilt also auch $\overline{WE} = \overline{WD}$, also muss W auch auf w_γ liegen.



Dann wird auch klar:

Weil W von allen drei Seiten den gleichen Abstand hat, ist er der Mittelpunkt des Inkreises !

Der Inkreis berührt das Dreieck von innen.

Die Berührungspunkte sind nicht gut zu erkennen, weshalb man sie konstruiert:

Weil der Radius immer senkrecht auf der berührenden Tangente steht, muss man das Lot von W auf die Dreiecksseiten fallen.

So erhält man die Berührungspunkte. Einer von ihnen wurde konstruiert (F) und reicht auch aus, um den Radius WF des Inkreises zu finden.

Auf der letzten Seite habe ich unten eine Eigenschaft festgehalten. Diese wollen wir auf den Inkreis übertragen:

Wenn man zwei der Berührungspunkte kennt, etwa D und E, dann kann man zu ihnen die Mittelsenkrechte konstruieren und erhält dann die Winkelhalbierende.

Kennt man alle drei Berührungspunkte, kann man so zwei Winkelhalbierende konstruieren und damit den Mittelpunkt des Inkreises finden.

Konstruktionsbeispiele

Beispiel 1: Gegeben ist das Dreieck ABC durch $b = 4,5 \text{ cm}$, $\beta = 47^\circ$ und $a = 5,2 \text{ cm}$.
Konstruiere das Dreieck und seinen Inkreis.

